CONCURSEIRO
FORA DA CAIXA

ESTATÍSTICA, MATEMÁTICA FINANCEIRA, MATEMÁTICA E LÓGICA

HENRIQUE DE LARA MORAIS
www.concurseiroforadacaixa.com.br

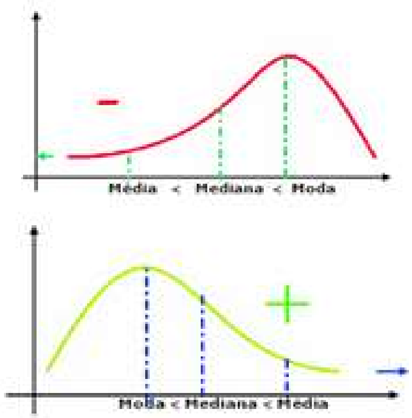
Sumário

ESTATÍSTICA

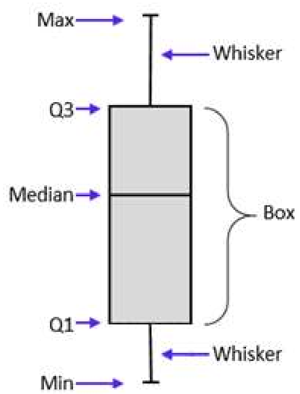
MEDIDAS DE POSIÇÃO E MEDIDAS DE DISPERSÃO

MEDIDAS DE POSIÇÃO

TENDÊNCIA CENTRAL	Média	**Aritmética (MA)** $\frac{\sum(x_i \cdot f_i)}{n}$	**Geométrica (MG)** $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \dots x_n}$	**Média Harmônica (MH)** $\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\dots\frac{1}{x_n}}$
		Para dois números $MA = \frac{MG^2}{MH}$	Os valores das médias seguem o padrão: **(MA ≥ MG ≥ MH)** *Ordem alfabética* ***DECRESCENTE***	
	Moda	• Moda é a observação que **MAIS** se repete;		
SEPARATRIZES	Mediana	• Divide a distribuição em **2 partes iguais** • Nº elementos **PAR** (ROL): $\frac{n+1}{2}$ • Nº de elementos **ÍMPAR** (ROL): elemento central • Mediana na interpolação: divide-se a freq. total por **2**		
	Quartil	• Para uma tabela – **interpolação linear** • **Distância interq. = ($Q_3 - Q_1$)** • **Distância semi-interquartílica = ($Q_3 - Q_1$)÷2**		
	Outras	• Decil: Divide a distribuição em 10 partes iguais • Percentil: Divide a distribuição em 100 partes iguais		



A **média sempre estará na CAUDA**, e a **moda no topo** (onde mais ocorre).



MEDIDAS DE DISPERSÃO

ABSOLUTA	**Amplitude (h)**	$h = Limite_{superior} - Limite_{inferior}$			
	Variância (s^2 | σ^2)	**Variância Populacional** $\sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}$ **Variância Amostral** $s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$	*Forma Rápida de Cálculo* $\sigma^2 = \frac{\sum(x_i^2)}{n} - \mu^2$ ***Média dos quadrados MENOS quadrado da média*** *Se amostra: multiplicar TUDO por* **N/(N-1)** obtendo **variância amostral**.	Importante! Quando x_i **for** multiplicado ou dividido por um valor, a variância é afetada com o **quadrado**. **Ex: se x_i for multiplicadao por 2 a variância fica multiplicada por 4, se por 3, fica multiplicada por 9.**	
	Desvio Padrão (s | σ)	$Desvio\ Padrão = \sqrt{Variância}$ Na omissão da questão, **usar POPULAÇÃO**			
	Desvio Médio (d_M)	A soma dos desvios em relação a média aritmética é **sempre 0**	**Rol** $d_M = \frac{\sum\lvert x_i - \mu\rvert}{n}$	**Tabela** $d_M = \frac{\sum\lvert x_i - \mu\rvert \cdot f_{absoluta}}{n}$	**Dist. de Frequência** $d_M = \frac{\sum\lvert Pm_i - \mu\rvert \cdot f_{absoluta}}{n}$

RELATIVA	Coeficiente de Variação (cv)	$$cv = \frac{Desvio\ Padrão}{média}$$ • Quanto **menor** o cv, mais **homogêneo** são os valores • Para cv < 30% → média é representativa
	Variância Relativa	$$Variância\ Relativa = cv^2$$

COMO SÃO AFETADAS AS MEDIDAS PELAS OEPRAÇÕES MATEMÁTCAS

Quando os valores observados forem multiplicados, divididos, somados ou diminuídos, as medidas estatísticas também têm seus valores alterados. Eles são afetados da seguinte maneira:

		Soma e Subtração	Multiplicação e Divisão
Medidas de Posição	Tendência Central	**AFETA**	**AFETA**
	Separatrizes	**AFETA**	**AFETA**
Medidas de Dispersão	Absoluta	**NÃO AFETA**	**AFETA***
	Relativa	**AFETA**	**NÃO AFETA**

**Lembrar que a variância é afetada pelo quadrado do número que multiplica/divide;*

DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

DISCRETAS

		Função Densidade de Probabilidade - f(X)	MÉDIA μ	VARIÂNCIA σ^2	Função Distribuição Acumulada – F(X)	Considerações
DISCRETAS	**BINOMIAL**	$P(x = S) = C_{n,S} \cdot p^S \cdot (1-p)^{n-S}$	np	$np \cdot (1-p)$	*Calcular P(1), P(2), P(3),...., P(n) e somar*	*Probabilidade de se obter **exatamente S sucessos em n tentativas?*** Sempre em pares, sendo os **eventos complementares**: *cara ou coroa, menino ou menina, bola azul, não azul.* A **ordem NÃO é especificada** (daí vir a combinação). **RETIRADAS COM REPOSIÇÃO**.
	BERNOULLI	$P(x = k) = p^k \cdot (1-p)^{1-k}$	p	$p \cdot (1-p)$	*Calcular P(1), P(2), P(3),...., P(n) e somar*	A variável x só assume valores 0 ou 1 (binário). É um **caso especial da binomial**.

		Função Densidade de Probabilidade - f(X)	MÉDIA μ	VARIÂNCIA σ^2	Função Distribuição Acumulada – F(X)	Considerações
	POISSON	$P(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$	λ	λ	*Calcular P(1), P(2), P(3),...., P(n) e somar*	**λ** geralmente **é dado** na forma *"a média..."* ou *"a variância..."*. **Cuidado!** Quando a questão fala "a média (λ) é de 5/h....qual a probabilidade de 10 em 3h? Transformar o λ = 5/h para λ = 15/h.
	GEOMÉTRICA	$P(x) = p(f) \times p(f) \ldots \times p(s)$	$\frac{1}{p(s)}$	$\frac{1 - p(s)}{p(s)^2}$	*Calcular P(1), P(2), P(3),...., P(n) e somar*	Situação: *"fracasso, fracasso, ...sucesso"*, ou seja, **até se obter o 1º sucesso.** A variável ***x*** **é o número de tentativas.**
	HIPERGEOM.	$P(x = k) = \frac{C_{D,k} \times C_{(n-D),(n-k)}}{C_{N,n}}$	np	-	*Calcular P(1), P(2), P(3),...., P(n) e somar*	**RETIRADAS SEM REPOSIÇÃO**

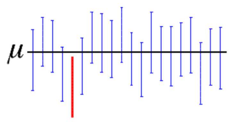
CONTÍNUAS

		Função Densidade de Probabilidade - f(X)	MÉDIA μ	VARIÂNCIA σ^2	Função Distribuição Acumulada – F(X)	Considerações
CONTÍNUAS	**UNIFORME**	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, para \ a \leq x \leq b \\ 0, \ para \ qualquer \ outro \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	*É a área abaixo da reta (base x altura)*	-
	EXPON.	$f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2}$	$F(x_0) = 1 - e^{-\alpha x_0}$ $P(0 \leq x \leq x_0)$	-
	NORMAL	A fórmula não interessa, é feita com uso da tabela normal	-	-	*Feita com o uso da tabela normal*	-

INTERVALO DE CONFIANÇA

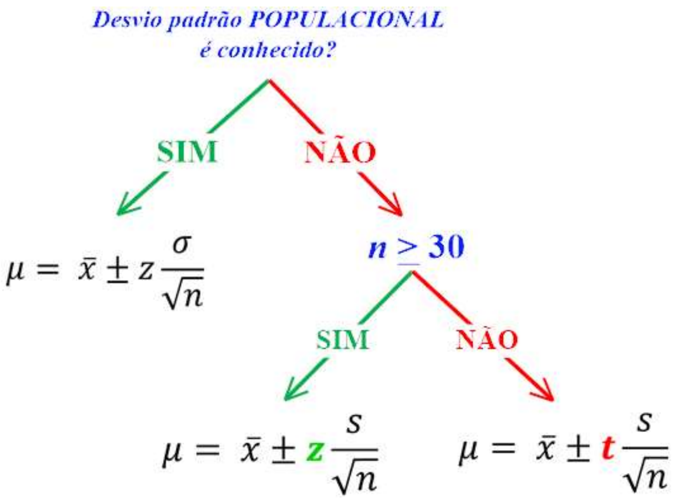
CONCEITO

É uma amplitude de valores, derivados de amostras, que têm a **probabilidade de conter o valor de um parâmetro populacional** desconhecido. Devido à sua natureza aleatória, é improvável que duas amostras de uma determinada população irão render intervalos de confiança idênticos. Mas, **se você repetir sua amostra várias vezes**, uma determinada porcentagem dos intervalos de confiança resultantes conteria o parâmetro populacional desconhecido.



Aqui, a linha preta representa o valor fixo da ***média desconhecida da população***. Os intervalos de confiança azuis contêm o valor da média da população. O intervalo de confiança vermelho totalmente abaixo da linha horizontal não contém esse valor. Um intervalo de confiança de 95% indica que 19 em 20 amostras (95%) da mesma população produzem intervalos de confiança contendo o parâmetro da população.

INTERVALO DE CONFIANÇA PARA A MÉDIA



INTERVALO DE CONFIANÇA PARA A PROPORÇÃO

$$p = p_0 \pm z\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$$

*Quando a banca **não der** p_0, supõe-se que a variância é máxima, de forma que* p_0 = ***50%***

TESTE DE HIPÓTESES

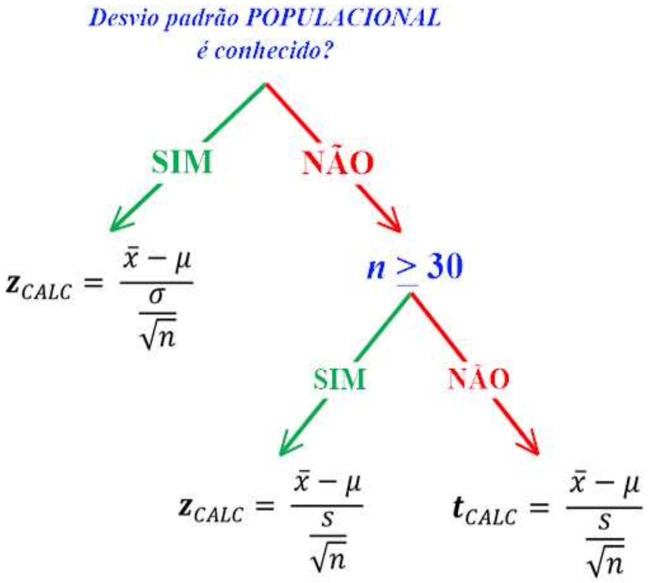
PRELIMINARES

	H_0 verdadeira	H_0 falsa
Aceitar H_0	**NÃO HÁ ERRO** (DECISÃO CORRETA)	ERRO TIPO II (β)
Rejeitar H_0	**ERRO TIPO I (α)**	**NÃO HÁ ERRO** (DECISÃO CORRETA)

α: nível de significância, i.e., é a prob. de se cometer um Erro Tipo I.

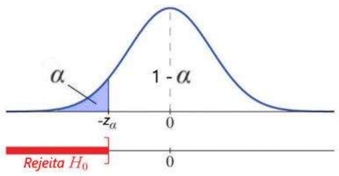
Pegadinha Clássica! A questão falar que há relação entre **α** e **β**, *ou que* **$\alpha + \beta = 1$**. Isso é ERRADO.

TESTE DE HIPÓTESE PARA A MÉDIA



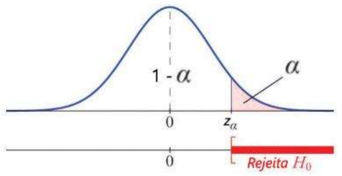
Unilateral à esquerda

$$\begin{cases} H_0: \mu \geq \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases}$$



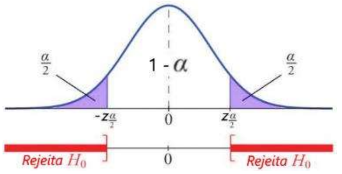
Unilateral à direita

$$\begin{cases} H_0: \mu \leq \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$$



Bilateral

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$



- O que determinar se o teste é à **esquerda, direita ou bilateral é o SINAL da hipótese alternativa** (H_1)
- O procedimento é **exatamente o mesmo** no caso de uma tabela t-Student
- μ é o que eu quero testar (população) e μ_0 é o da amostra que coletei.

TESTE DE HIPÓTESE PARA A PROPORÇÃO

$$z_{CALC} \; ou \; t_{CALC} = \frac{n(p_0 - p)}{\sqrt{np(1-p)}}$$

p_0: é a proporção da amostra (%)
p: é a proporção da população (%)
Procedimento:
Testar z_{CALC} ou t_{CALC} nas respectivas curvas (= **na média**).

P-VALOR (NÍVEL DESCRITIVO OU PROBABILIDADE DE SIGNIFICÂNCIA)

- **p-valor < α – Rejeita-se H_0**
- **p-valor > α - NÃO se rejeita H_0**

Portanto, **α** é o valor tabelado (área) de *z ou t* **[população]** já o p-valor é o valor **tabelado** (área) do z_{CALC} *ou* t_{CALC} **[amostra]**.

CORRELAÇÃO E REGRESSÃO

COVARIÂNCIA

Definição: medida do **grau de interdependência** numérica entre duas variáveis aleatórias. Assim, variáveis **independentes têm covariância zero**. Definição formal: $cov(x,y) = E[(x - E(x)) \times (y - E(y))]$ pouco utilizada. Para a prova levar:

$$cov(x,y) = E(xy) - E(x) \cdot E(y)$$

média dos produtos *menos* ***o produto das médias***

Obs: quando se tratar de covariância amostral também há a figura do fator de Bessel.

PROPRIEDADES

Relação de 2 variâncias com respeito à covariância: $\sigma^2_{x \pm y} = \sigma^2_x \pm 2cov(x,y) + \sigma^2_y$

Propriedade da covariância: $cov(ax + b, cy + d) = a \cdot c \times cov(x,y)$

RETA DE REGRESSÃO (RETA DOS MÍNIMOS QUADRADOS)

MMQ: técnica de otimização matemática que procura **encontrar o melhor ajuste** para um conjunto de dados tentando minimizar a soma dos quadrados das diferenças (resíduos) entre o valor estimado e os dados observados.

$$y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i + \epsilon_i$$

Propriedades da Reta de Regressão:

$\sum \epsilon_i = 0$	$\sum {\epsilon_i}^2 = valor\ mínimo$	$E(\epsilon_i) = 0$

1º) Encontrando $\hat{\beta}$: formalmente temos que $\hat{\beta} = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x^2}$, porém, para fins de prova, a fórmula que mais cai é:

$$\frac{média\ dos\ produtos - produto\ das\ médias}{média\ dos\ quadrados - quadrado\ da\ média}$$

$$\hat{\beta} = \frac{n \cdot E(xy) - E(x) \cdot E(y)}{n \cdot E(x^2) - [E(x)]^2}$$

2º) Encontrando $\hat{\alpha}$: basta tirar a média de todos os termos da reta $y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i + \epsilon_i$, assim:

$$\hat{\alpha} = E(y) - \hat{\beta} \cdot E(x)$$

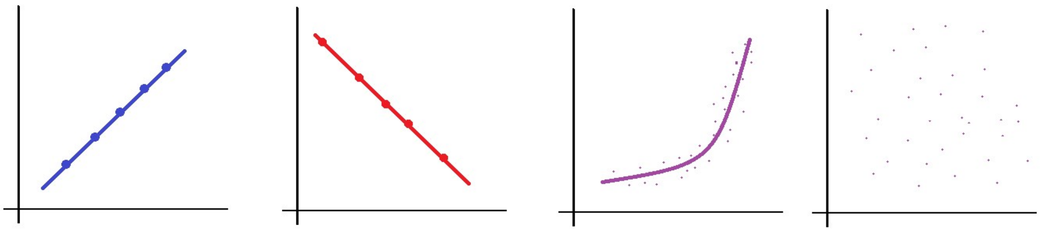
COEFICIENTE DE DETERMINAÇÃO (R^2)

R^2: é um valor que **varia entre 0 e 1** e indica, *em percentagem*, o **quanto o modelo consegue explicar os valores observados**. Quanto maior o R^2, mais explicativo é o modelo, melhor ele se ajusta à amostra.

$$R^2 = \frac{cov^2(x,y)}{\sigma_x^2 \times \sigma_y^2}$$

Coeficiente de CORRELAÇÃO Linear de Pearson (r): medida do grau de relação linear entre duas variáveis quantitativas. Este coeficiente **varia entre -1 e 1**.

$$r = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x \times \sigma_y} \rightarrow \begin{cases} r = 1: correlação\ linear\ perfeita\ positiva \\ r = 0: não\ existe\ uma\ correlação\ LINEAR \\ r = -1: correlação\ linear\ perfeita\ negativa \end{cases}$$



r = 1 pontos sobre reta

r = -1 pontos sobre reta

r = 0 Correlação NÃO linear

r = 0 Variáveis independentes

EXTRA – QUESTÕES DE ESTATÍSTICA (TEC)

São questões de várias bancas (basta excluir das questões as bancas que não te interessam) e níveis (questões simples às complexas). Complemente esse caderno com questões que você já selecionou como favoritas / importantes, para revisar nas semanas anteriores à prova. Aliando este resumo com a resolução de questões você certamente estará MUITO bem preparado(a)! Link: https://tec.ec/s/Qb403

MATEMÁTICA FINANCEIRA

REGIMES DE JUROS E DESCONTOS – SIMPLES E COMPOSTOS

	JUROS SIMPLES	JUROS COMPOSTOS
Fórmula	$M = C(1 + it)$	$M = C(1 + i)^t$
Desconto Racional / por Dentro	$PV = \frac{N}{(1 + it)}$	$PV = \frac{N}{(1 + i)^t}$
Desconto Comercial ou Bancário	$PV = N(1 - it)$	$V = N(1 - i)^t$
Desconto	$D = N - PV$	$D = N - PV$

M: montante final

C: é o capital inicial
PV: valor presente (ou valor atual)
N: valor futuro (ou valor nominal)
i: é a taxa de juros (ex: se a taxa for 1%, então *i* = 0,01)
t: é o tempo. Lembrando que o tempo deve estar na mesma unidade da taxa. Ex: se a taxa for 5% ao trimestre, o tempo deve estar em trimestres. Dessa forma, se o período de aplicação for de 1 ano, t = 4, já que temos 4 trimestres em 12 meses.

Já vi cair em **provas da FCC** a fórmula da capitalização contínua (onde "*e*" é o logaritmo neperiano – esse valor sempre é dado).

$$M = C \cdot e^{it}$$

CONVENÇÃO EXPONENCIAL E CONVENÇÃO LINEAR

CONVENÇÃO EXPONENCIAL	COVENÇÃO LINEAR
Utiliza-se todo o valor decimal na parte exponencial (<u>EX</u>: 1 mês e 3 dias = 1,1; 2 meses e 15 dias = 2,5). $M = C(1 + i)^t$	Utiliza-se **juros simples na parte fracionária (q)** do mês e **juros compostos na parte inteira (p)**: $M = C(1 + i)^p(1 + iq)$

Em questões teóricas pode-se perguntar em qual método o montante final é maior: $\mathbf{M_{LINEAR}} > \mathbf{M_{EXPONENCIAL}}$

TAXA NOMINAL, TAXA EFETIVA E TAXA EQUIVALENTE

Taxa Nominal: o **período da taxa <u>é diferente</u> do período de capitalização**. As questões geralmente anunciam da seguinte forma, por exemplo: 24% a.a/mês, *ou seja*, ***<u>24% ao ano, capitalizados mensalmente</u>***.

Para transformá-la em **Taxa Efetiva** basta fazer a **taxa proporcional**, de forma que o período da **taxa <u>se iguale</u>** ao período da **capitalização**, como por exemplo: a taxa de ***<u>24% ao ano, capitalizados mensalmente</u>***, significa que, como 1 anos tem 12 meses, pegamos o valor da taxa (24%) e dividimos por 12 (para obter o proporcional mensal), logo **Taxa Efetiva = 2%** <u>ao mês</u>. Outro exemplo: 18% ao ano capitalizados bimestralmente. Bom, 1 ano tem 6 bimestres, logo 18% dividido por 6 = 3% <u>ao bimestre</u>.

Finalmente, para descobrir a **Taxa Equivalente**, basta pegar a **Taxa Efetiva** e "jogar" na fórmula de juros compostos. Pegando o segundo exemplo anterior, qual seria a Taxa Equivalente anual? Bom, pegamos a efetiva (3% ao bimestre) e como 1 ano tem 6 bimestres, *t* = 6, logo $I_{EQUIVALENTE}$ = (1+0,03)^6 = $1{,}03^6$ = 1,1940, ou seja, 19,4% **<u>ao ano</u>**.

Em suma, a ordem de resolução é:

Nominal ➡ **Efetiva** ➡ **Equivalente**

INFLAÇÃO, JUROS REAIS, JUROS APARENTES

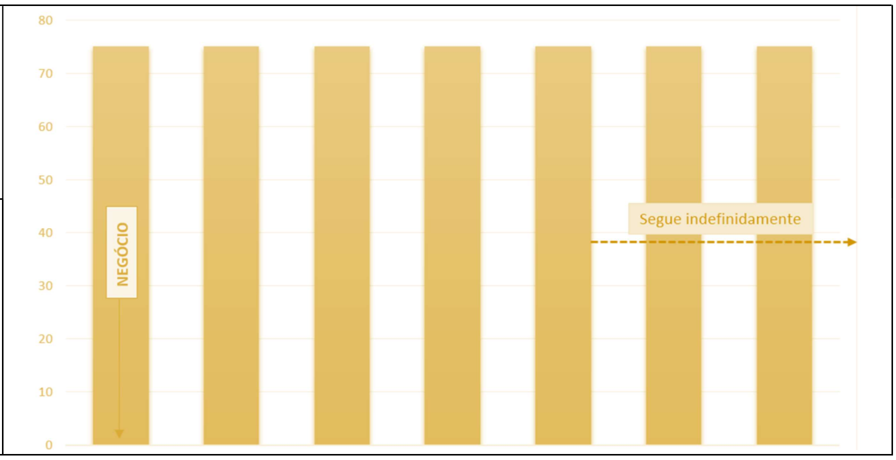
Quando há inflação, ao fazer uma aplicação financeira, apenas uma parte do rendimento foi efetivamente rendimento (real), pois a outra parte é corroída pela inflação. Assim:

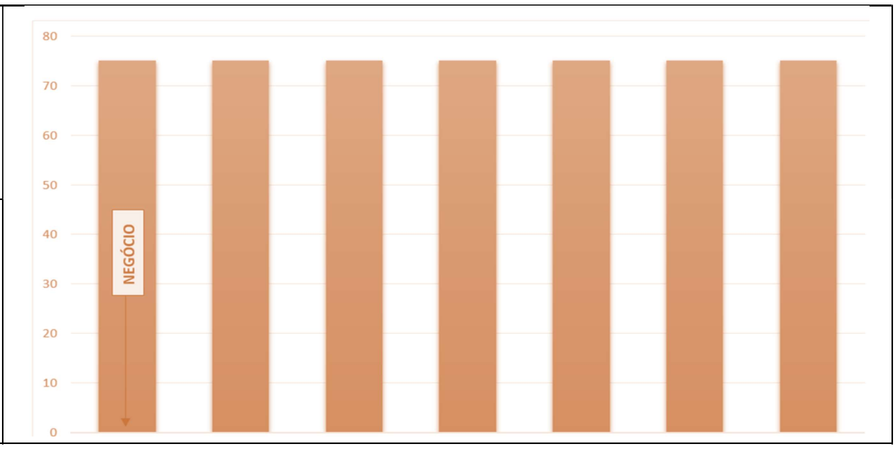
$$(1 + i_{APARENTE}) = (1 + i_{REAL})(1 + i_{INFLAÇÃO})$$

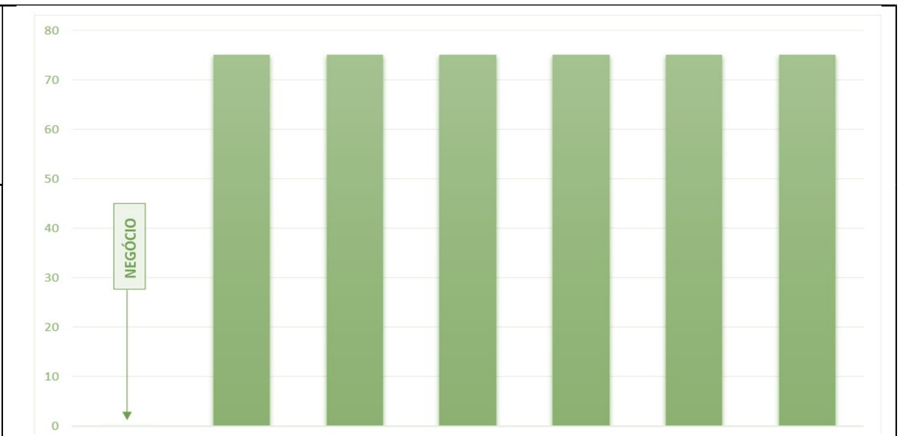
Qualquer questão de prova vai te pedir basicamente a aplicação dessa fórmula. Não tem mistério!

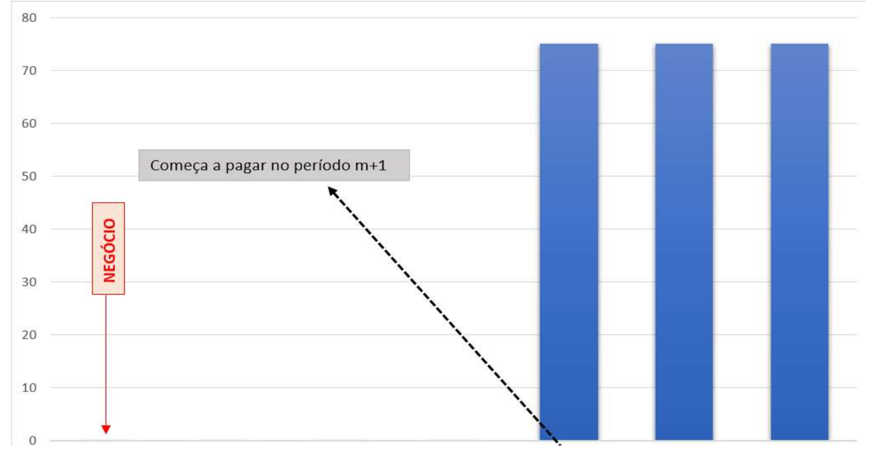
SÉRIES DE PAGAMENTOS (ANUIDADES)

Conceito: São séries de pagamentos de **mesmo valor (R)**, distribuídos **uniformemente no tempo** e regime de **juros compostos**.

Perpétua: o número de pagamentos é infinito	Valor Presente dos pagamentos (PV) $PV = \frac{R}{i}$ Valor Futuro dos pagamentos (FV) -	

Antecipada: 1ª parcela estará no ato da realização do negócio.	Valor Presente dos pagamentos (PV) $PV = \boldsymbol{R} + R \cdot a_{(n-1)\neg i}$ Valor Futuro dos pagamentos (FV) $FV = R \cdot S_{n\neg i}$	

Postecipada: 1ª parcela estará **UM período após** o negócio	Valor Presente dos pagamentos (PV) $PV = R \cdot a_{n\neg i}$ Valor Futuro dos pagamentos (FV) $FV = R \cdot S_{n\neg i}$	

<table>
<tr><td rowspan="2"><u>Diferida</u>: 1ª parcela estará no <u>período m+1</u> do negócio (carência).</td><td>Valor Presente dos pagamentos (PV)
$PV = R\,(a_{n+m¬i} - a_{m¬i})$</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>Valor Futuro dos pagamentos (FV)
$FV = R \cdot S_{n¬i}$</td></tr>
</table>

Importantíssimo **DECORAR** as fórmulas abaixo:

$$S_{n¬i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad a_{n¬i} = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} = \frac{1}{FRC}$$

SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

Em qualquer sistema de amortização a prestação é a soma da cota de amortização e dos juros: **P = J + A**

- **A**: parcela que efetivamente reduz a dívida
- **J**: remuneração do empréstimo. O **juro de um período** é calculado sobre o **saldo devedor do início daquele período**.

SISTEMA FRANCÊS (PRICE)

<u>Cálculo da Prestação</u>: **sempre iguais** $P = \frac{VP}{a_{n¬i}} = VP \cdot FRC$ **P é constante**	<u>Juros de cada período</u>: **vai diminuindo**, calculado sobre o saldo devedor (SD): $J = SD \cdot i$ J <u>diminui</u> com o tempo	<u>Amortização de cada período</u>: é o valor da prestação menos os juros: $A = P - J$ A aumenta com o tempo

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE (SAC)

<u>Cálculo da Prestação</u>: $P = A + J$ P <u>diminui</u> com o tempo	<u>Juros de cada período</u>: **vai diminuindo**, calculado sobre o saldo devedor (SD): $J = SD \cdot i$ J <u>diminui</u> com o tempo	<u>Amortização do período</u>: **constante** $A = \frac{VP}{n}$ **A é constante**

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO MISTO (SAM)

<u>Cálculo da Prestação</u>: $P_{Misto} = \frac{P_{Price} + P_{SAC}}{2}$ P <u>diminui</u> com o tempo	<u>Juros de cada período</u>: **vai diminuindo**, calculado sobre o saldo devedor (SD): $J = SD \cdot i$ J <u>diminui</u> com o tempo	<u>Amortização de cada período</u>: é o valor da prestação menos os juros: $A = P - J$

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO AMERICANO (SAA)

<u>Cálculo da Prestação</u>: devedor paga **apenas os juros** ao longo do tempo. $P = VP \cdot i$	-	-

OBSERVAÇÕES (QUSTÕES TEÓRICAS)

- **MESMA situação de financiamento**, o valor dos **JUROS pagos é DIFERENTE**
- **MESMA situação de financiamento, as PARCELAS,** em ordem **crescente, <u>no INÍCIO</u>: SAC > SAM > PRICE**
- **MESMA situação de financiamento, as PARCELAS,** em ordem **crescente, <u>no FIM</u>: PRICE > SAM > SAC**
- **AMORTIZAÇÃO mais RÁPIDA <u>no INÍCIO</u>:** SAC
- **AMORTIZAÇÃO mais RÁPIDA <u>no FIM</u>:** PRICE

ANÁLISE DE INVESTIMENTOS

VALOR PRESENTE LÍQUIDO

$$VPL = VP_{ENTRADAS} - VP_{SAÍDAS}$$

- VPL > 0 [aceita-se o projeto]. Com isso, **<u>necessariamente TIR > TMA</u>**
- Entre dois projetos, escolher sempre o de maior VPL

TAXA INTERNA DE RETORNO (TIR)

TIR é a **taxa que torna o VPL = 0**, isto é, trazendo os fluxos de entrada e saída a valor presente, a soma das saídas e das entradas é nulo.

- Aceitar se TIR **maior** que custo de capital, de oportunidade ou TMA
- Entre dois projetos, escolher o de **maior TIR**

FLUXO INCREMENTAL

Quando informações do VPL e TIR forem conflitantes, escolher projeto com maior investimento (ou VPL), desde que a TIR do fluxo incremental for maior que a TMA. O fluxo incremental é **<u>utilizado em projetos mutuamente exclusivos</u>**, não em projetos independente0s.

Obs: <u>TMA</u>: Taxa Mínima de Atratividade representa o **mínimo que um investimento deve remunerar** para que seja considerado viável economicamente.

EXTRA – QUESTÕES DE MATEMÁTICA FINANCEIRA (TEC)

São questões de várias bancas (basta excluir das questões as bancas que não te interessam) e níveis (questões simples às complexas). Complemente esse caderno com questões que você já selecionou como favoritas / importantes, para revisar nas semanas anteriores à prova. Aliando este resumo com a resolução de questões você certamente estará MUITO bem preparado(a)! Link: https://tec.ec/s/Qb0Km

MATEMÁTICA

MATEMÁTICA BÁSICA

TÓPICO	LEMBRETES
Princípio da casa dos pombos	Se tivermos mais pombos do que casas, então pelo menos uma casa terá dois pombos. Veja ESSA e ESSA questão.
Números primos	⇨ São aqueles que só são **divisíveis por 1 e por si mesmos**: 2, 3, 5, ... ⇨ O número **1 não é considerado** primo. ⇨ Único número **primo par é o 2**. ⇨ Todo **inteiro não-primo** pode ser decomposto pelo **produto de nºs primos** (ex: **12 = 3 x 2 x 2**)
Transformar dízima periódica em fração geratriz	Ex: 43,258**656565** 1- Colocar a parte que NÃO faz parte da dízima em uma fração com base 10: $$\frac{43258}{1000} + 0{,}000\overline{65}$$ 2- Ver quantas **casas decimais tem a dízima** e **dividir por "x" 9's**. Como 0,00065 a dízima é de $x = 2$ algarismos → divido por 99, de forma que: $$0{,}00065 = \frac{1}{1000} \times \frac{65}{99} = \frac{65}{99000}$$ 3- Agora basta somar as duas frações, obtendo então a fração geratriz: $$\frac{43258}{1000} + \frac{65}{99000} = \frac{4282542070}{99000000}$$
Progressão Aritmética (PA) [r: razão da PA]	**Termo Geral (PA):** $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ **Soma dos "n" termos (PA):** $\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$
Progressão Geométrica (PG) [q: razão da PG]	**Termo Geral (PG):** $a_n = a_1 \times q^{n-1}$ **Soma dos termos (PG):** $a_1 \times \frac{(q^n-1)}{q-1}$ **Soma PG Infinita, para 0 < q < 1:** $\frac{a_1}{1-q}$
Propriedade dos Logaritmos	$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$ $\log(x/y) = \log x - \log y$ $a^{\log_a x} = x$
Funções	**Função composta** $g(f(x)) = g^\circ f(x) = (gof)(x)$ **Função Inversa** $f(x)^{-1} = f(y)$ Substitui-se x por y e então encontra-se novamente y. **Injetora**: quando elementos diferentes do domínio são relacionados a elementos diferentes do contradomínio; **Sobrejetora**: quando o contradomínio é igual ao conjunto imagem. **Bijetora**: quando é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo (só essas podem ser inversa)

ÁLGEBRA LINEAR

MATRIZES

Matriz quadrada: nº linhas = nº colunas

Matriz oposta: é a "negativa" de $A_{m,n}$, ou seja $(-1) \cdot A_{m,n}$ – basta multiplicar todos os elementos de $A_{m,n}$ por -1

Matriz identidade (I): elementos nulos e **diagonal principal formada por 1**. Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz transposta: inverte linhas (i) com as colunas (j). Seja $A = a_{i,j}$, então $\mathbf{A^T = a_{j,i}}$. Por exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 11 & 6 & 1 \\ 19 & 3 & 4 \end{bmatrix}, sendo\ A^T = \begin{bmatrix} 5 & 11 & 19 \\ 7 & 6 & 3 \\ 9 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriz inversa: só existe para **matrizes quadradas,** cujo **determinante é DIFERENTE de 0**. Representada por A^{-1}:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \text{ [identidade]}$$

Por exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, sendo\ A^{-1} = \frac{1}{8} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \\ -5 & 14 & 13 \end{bmatrix}$$

DETERMINANTES

Toda matriz **quadrada** possui um determinante

Situações em que o **determinante = 0**

- Uma linha / coluna preenchida por 0;
- Uma linha / coluna é proporcional ou igual a outra(s);
- Uma linha é combinação linear da outa

Situações em que o determinante **NÃO SE ALTERA**

- $\det(A) = \det(A^T)$;
- Quando se multiplica uma linha / coluna de uma matriz A por um nº e soma-se a uma linha/coluna paralela, formando uma outra matriz B → det(A) = det(B);

Situações em que o determinante **SE ALTERA**

- Trocar uma linha / coluna com outra paralela, o det(A) **muda de sinal**;
- Multiplicar uma linha / coluna, por um k, faz com o que o **determinante fique multiplicado por k**.
- Multiplicar uma matriz A de ordem "n" por um k, faz com o que o determinante fique **multiplicado por k^n**.

Determinante da matriz –produto é o produto dos determinantes

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Determinante da inversa é o inverso da determinante original

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

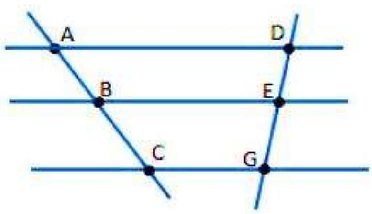
Casos facilitados de cálculo

Na matriz diagonal (elementos não pertencentes à diagonal principal = 0) **ou** triangular (elementos acima/abaixo da diagonal principal = 0), o determinante é a multiplicação dos elementos da diagonal principal.

$$Matriz\ Diagonal = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e\ Matri\ \ Triângulo = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -5 & 14 & 13 \end{bmatrix}$$

SISTEMAS LINEARES	Seja um sistema linear genérico independente (3 incógnitas) $\begin{cases} Ax + By + \quad = K \\ Dx + Ey + Fz = W \\ Gx + Hy + Iz = L \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ W \\ L \end{bmatrix}$ $T = \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix}$ e $T_x = \begin{bmatrix} K & B & C \\ W & E & F \\ L & H & I \end{bmatrix}$, basta substituir a coluna x pelos termos independentes. Para as demais incógnitas é feito da mesma forma, obtendo T_y e T_z.
	Sistema homogêneo: • Termos independentes (K, W, L) forem **NULOS**.
	SPD (possível e determinável): existe solução e ela é a única possível. • Quando há apenas solução trivial (x = y = z = 0), temos um SPD; • **det(T) ≠ 0** • No SPD, as soluções são do tipo $x = \frac{det(T_x)}{det(T}$ e assim em diante.
	SPI (possível e indeterminável): existe solução, mas **não é única**. • **det(T) = 0** • **det($T_{\text{todas variáveis}}$)** = 0 **Devem acontecer simultaneamente**
	SI (impossível): não tem solução. • **det(T) = 0** • **det($T_{\text{alguma variável}}$)** ≠ 0 **Devem acontecer simultaneamente**

GEOMETRIA E TRIGNOMETRIA

TÓPICO	LEMBRETE
Teorema de Tales	 Um feixe de retas paralelas cortado por duas transversais forma **segmentos de retas proporcionais**. Olhando para a figura ao lado, o Teorema de Tales diz que: $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EG}}$
Congruência de Triângulos	Dois triângulos são congruentes quando seus lados correspondentes apresentam medidas iguais. Para que dois triângulos sejam congruentes é suficiente que: ▪ LLL: três lados congruentes; ▪ LAL: dois lados congruentes e ângulo entre eles; ▪ LAA: um lado e dois ângulos congruentes.
Semelhança de Triângulos	Se dois triângulos são semelhantes (**lados proporcionais**), então seus ângulos internos correspondentes são iguais entre si.

TÓPICO	LEMBRETE

Polígonos

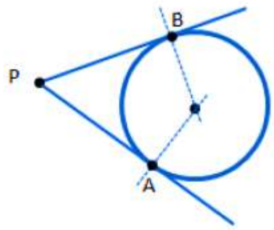
Diagonais que parte de um vértice	$(n-3)$
Quantidade total de diagonais de um polígono	$\frac{n \times (n-3)}{2}$
Nº de ângulo de um polígono	$nº\ de\ lados$
Soma dos ângulos internos de um polígono	$(n-2) \times 180$

n = número de lados de um polígono

Circunferência

Área de uma Circunferência: $A = \pi r^2$

Perímetro de uma Circunferência: $C = 2\pi r$



Um segmento de reta que tangencia uma circunferência faz com o raio um ângulo reto (90 graus).

Seja "P" o ponto exterior e A B os pontos de tangência. A medida do segmento PA é igual à medida do segmento PB

Sólidos

Sólido	Área Lateral	Volume
Prisma	Soma das áreas dos quadriláteros	$Área\ da\ base \times h$
Cilindro reto	$2\pi r \times h$	$Área\ da\ base \times h$
Pirâmide	Soma das áreas dos triângulos	$\frac{Área\ da\ base \times h}{3}$
Cone reto	$\pi r \times g$	$\frac{Área\ da\ base \times h}{3}$
Esfera	$4\pi r^2$	$\frac{4\pi r^3}{3}$

Funções Trigonométricas

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$(\sin a)^2 + (\cos a)^2 = 1$

Ângulo	Sen	Cos	Tg
0	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{4}/2$	
30	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{3}/2$	
45	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\frac{sen}{cos}$
60	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{1}/2$	
90	$\sqrt{4}/2$	$\sqrt{0}/2$	

EXTRA – QUESTÕES DE MATEMÁTICA FINANCEIRA (TEC)

São questões de várias bancas (basta excluir das questões as bancas que não te interessam) e níveis (questões simples às complexas). Complemente esse caderno com questões que você já selecionou como favoritas / importantes, para revisar nas semanas anteriores à prova. Aliando este resumo com a resolução de questões você certamente estará MUITO bem preparado(a)! Link: https://tec.ec/s/Qh3cm

RACIOCÍNIO LÓGICO

PROPOSIÇÕES

Uma proposição nada mais é do que uma **sentença declarativa** (p: a bola é azul) representada por **palavras ou símbolos** (q: 1+1=2, r: 2>3), que pode assumir valor **VERDADEIRO** ***ou*** **FALSO**. **Atenção!** Sentença:

- **Sem verbo**
- **Interrogativa** (?)
- **Exclamativa** (!)
- **Imperativa ("faça", "acorde", "ande")**
- **Equações (x + 2 = 3)**

São sentenças abertas, ou seja, você não pode classifica-las como V ou F. Dessa forma, elas **NÃO SÃO proposições**

Uma outra forma que não as anteriores de expressar uma sentença aberta é quando não há como determinar o sujeito. Posso dar como exemplo a seguinte expressão: "**Ele** foi o melhor jogador em 2005" – ele quem? Dessa forma, essa é uma sentença aberta!

PROPOSIÇÃO SIMPLES X COMPOSTA

VIA DE REGRA, leve para a prova a ideia de que:

- **1 verbo** = proposição simples
- **2 verbos** = proposição composta (ligadas por um conectivo)

Observação: CESPE - Quando o CESPE perguntar, **olhar para o sentido da sentença** e não dos exatos termos escritos. Assim, uma sentença ainda que com 2 verbos pode ser considerada simples. Vide exemplo abaixo:

> **(CESPE/MTE/AFT/2013)** A sentença "*O crescimento do mercado informal, com empregados sem carteira assinada, é uma consequência do número excessivo de impostos incidentes sobre a folha de pagamentos*" pode ser corretamente representada, como uma proposição composta, na forma P→Q, em que P e Q sejam proposições simples convenientemente escolhidas.
>
> Na realidade estamos diante de uma **proposição simples** (P), onde a ideia básica é a seguinte: "O crescimento disso é uma consequência daquilo". Assim, não é possível representarmos a sentença na forma P → Q, pois nem sequer existe a proposição Q. Portanto, o item está ERRADO.
>
> De acordo com esse entendimento do **CESPE**, para **NEGAR uma proposição simples**, basta colocar o "**não" antes do verbo principal**.

TABELAS VERDADE

P	Q	P ∧ Q	P ∨ Q	P ⊻ Q	P → Q	P ↔ Q
V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F
F	F	F	F	F	V	V
Em "português"		- Isso E aquilo - Isso MAS aquilo (ver o contexto)	Isso OU aquilo	OU isso OU aquilo	- SE... ENTÃO... - Sempre que... - Quando... - Toda vez que...	- SE E SOMENTE SE - Apenas... - Assim como

Dica! Sempre olhe para o **contexto da frase**. Se estiver difícil de entender, ou ela for muito longa, tente transformá-la em algo menor e mais "platável". Por exemplo: "*O aumento do endividamento das famílias brasileiras, principalmente aquelas de baixa renda,* ***se deve*** *à crise que passamos nos últimos 3 anos e à falta de planejamento financeiro*".

Como transformar isso em uma proposição? Veja que ela pode ser reduzida a: endividamento aumentou devido à crise E à falta de planejamento. Esquematizando:

endividamento aumentou devido à crise **E** (endividamento aumentou devido) à falta de planejamento

P **∧** **Q**

CONDIÇÃO NECESSÁRIA E CONDIÇÃO SUFICIENTE

Condicional: P→ Q	**Bicondicional**: P↔ Q
P é **suficiente** para Q - **S**uficiente, **+** próximo do **S**e Q é **necessário** para P	P é **necessário e suficiente** para Q Q é **necessário e suficiente** para P

TABELAS VERDADE COMPOSTAS

Ocorre quando temos mais de duas proposições com "equações lógicas". Por exemplo: ~P^Q→ RVP. Seguimos então uma **ordem de resolução** (sempre o que vier dentro dos parênteses primeiro), obedecendo:

1° - Negações (~)

2° - Conjunções (∧)

3° - Disjunções (∨/ ⊻)

4° - Condicional (→)

5° - Bicondicional (↔)

Ah, existem questões que perguntam simplesmente o nº de linhas que uma tabela verdade composta tem. O cálculo é extremamente simples, sendo:

$$\text{nº linhas: } 2^{(\text{nº de proposições})}$$

Por exemplo: para 4 proposições temos $2^4 = 16$ linhas.

TAUTOLOGIA, CONTRADIÇÃO E CONTINGÊNCIA

TAUTOLOGIA: proposição composta que sempre assume valor VERDADEIRO. Isto é, a tabela verdade inteira só tem V	**CONTINGÊNCIA**: É uma proposição composta cujo valor lógico pode ser VERDADEIRO ou FALSO. A tabela verdade tem tanto V quanto F	**CONTRADIÇÕES**: proposição composta que sempre assume valor FALSO. Isto é, a tabela verdade inteira só tem F.

EQUIVALÊNCIAS LÓGICAS (AS QUE MAIS CAEM)

~(p → q) = p ∧ ~q - Dica! *Negação do Se então*: vai negar o se, MANÉ? (Mantém a primeira **E** nega a segunda)

(p → q) = ~p ∨ q - Dica! *Equivalência do Se então*: NEMA (Nega a primeira **OU** mantém a segunda)

~(p ∧ q) = (~p ∨ ~q)

(p → q) = (~q → ~p)

~(p ∨ q) = (~p ∧ ~q)

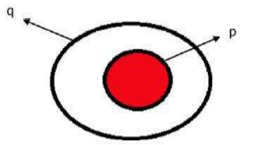
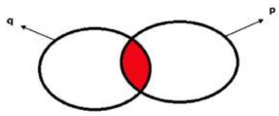
DILEMA CONSTRUTIVO

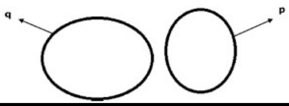
Trata-se da seguinte construção lógica (cai muito em provas da Vunesp, como AQUI e AQUI):

a → b
c → d
a ∨ c
----
b ∨ d

Em suma, se duas condicionais são verdade e pelo menos um de seus antecedentes também o é, então pelo menos um de seus consequentes também precisa ser

PROPOSIÇÕES CATEGÓRICAS / DIAGRAMAS LÓGICOS

TODO  	Quando "Todo P é Q" a <u>negação</u> é: "**Algum** P **não é** Q" ou "**Pelo menos um** P não é Q"; - P está contido em Q - Todo P é Q **≠** Todo Q é P – EX: todo cruzeirense é campeão é diferente de todo campeão é cruzeirense **NÃO** cair na **pegadinha** quando se fala "à noite" e substituir por "de dia"; "quente" e "frio". Elas não são proposições!
ALGUM  	- Quando "Algum P é Q" a <u>negação</u> é: "Nenhum P é Q"; - Algum P é Q **=** Algum Q é P – EX: algum cruzeirense é campeão é a mesma coisa de falar que algum campeão é cruzeirense.

NENHUM  	- Quando "Nenhum P é Q" a <u>negação</u> é: "Algum P é Q", "Existe pelo menos um P que é Q"; - Nenhum P é Q = Nenhum Q é P; - NÃO há interseção dos conjuntos p e q;

LÓGICA DE ARGUMENTAÇÃO

<u>Argumento</u>: **CONJUNTO** de PREMISSAS e suas CONCLUSÕES. *Ex*: **Se faz sol, vou à praia (P1)**. **Ontem fez sol (P2)**. **Logo, ontem fui à praia (C)**.

Argumento Inválido (sofisma): premissas **verdadeiras** e conclusão **falsa**.

Argumento Válido: premissas **verdadeiras** e conclusão **verdadeira** (nada mais é do que uma Implicação Lógica).

Cuidado!

- Um argumento não pode ser V ou F. Essa é uma propriedade das **proposições** (**premissas** e **conclusões**).
- Uma premissa NÃO pode ser repetida na conclusão.

<u>Abdução</u>: *não há como ter certeza da conclusão*, mas busca-se a **MELHOR EXPLICAÇÃO** – muito útil na **ciência forense** (pensar na "*<u>Navalha de Occam</u>*"). <u>Ex</u>: alguém este aqui recentemente, pois o assento do sofá ainda está quente.

<u>Argumentos dedutivos</u>: quando as premissas fornecem as informações suficientes para tornar a conclusão verdadeira.

Todo ser humano é racional.
Todos os homens são humanos.
<u>Todos os homens são racionais</u>.

<u>Dedução</u>: se você **CONCORDAR com as premissas**, ***obrigatoriamente***, deve-se **CONCORDAR com a conclusão**. O argumento dedutivo é o **<u>único</u>** que pode ser considerado VÁLIDO ou INVÁLIDO (= lógica de proposição). <u>Ex</u>: todo carro da Ford terá problema; eu tenho um carro da Ford; logo, meu carro terá problema

<u>Argumentos indutivos</u>: quando as premissas "não" fornecem as informações suficientes para tornar a conclusão verdadeira.

O avô de João foi um ótimo boxeador.
O pai de João foi um ótimo boxeador.
João é um ótimo boxeador.
<u>O filho de João SERÁ um ótimo boxeador</u> - perceba que não posso ter a convicta certeza de que o filho de João será um ótimo boxeador só pelo fato dos seus antepassados terem sido. Logo estou induzindo que ele será um ótimo boxeador

<u>Indução</u>: parte-se do caso PARTICULAR → conclusão GERAL. Pode-se concordar c/ premissas, MAS discordar da conclusão, portanto a conclusão é PROVÁVEL (≠ certeza) – muito útil nas ciências experimentais, medicina, etc. <u>Ex</u>: comprei 3 carros da Ford e todos deram problema; meu filho quer comprar um carro; recomendei que não comprasse da Ford, pois <u>eles dão problema</u>

EXTRA – QUESTÕES DE RACIOCÍNIO LÓGICO (TEC)

São questões de várias bancas (basta excluir das questões as bancas que não te interessam) e níveis (questões simples às complexas). Complemente esse caderno com questões que você já selecionou como favoritas / importantes, para revisar nas semanas anteriores à prova. Aliando este resumo com a resolução de questões você certamente estará MUITO bem preparado(a)! Link: https://tec.ec/s/Qccz3